



TITLE:

鉛直壁面を流れる粘性流体膜上の 波動(乱流場の特異性と統計理論 II)

AUTHOR(S):

仲矢, 長次

CITATION:

仲矢, 長次. 鉛直壁面を流れる粘性流体膜上の波動(乱流場の特異性と統計理論 II). 数理解析研究所講究録 1988, 652: 36-48

ISSUE DATE:

1988-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100468>

RIGHT:

鉛直壁面を流れる粘性流体膜上の波動

東大工 仲矢 長次 (Choji Nakaya)

1. はじめに

鉛直壁面を粘性流体が流れるとき、流れの不安定性によって表面に波が生ずる。この波の性質はカピツパによって、はじめに系統的にしらべられた。それによると、周期的なパルスを上流で与えると、二種の特長のある波が観測された。その一つは正弦波で、いそ一つはシンガル波と名付けられた波である。前者は線形理論によって、後者は孤立波を重ね合わせた表現であると考えられる。しかし現在では一般に波の性質は不明である。この報告では、観測された波のどのような種類のものがあつかわれているにする。

2. 運動方程式

直交座標 x, y, z と x 軸を鉛直下方にとる。流れの速度を Ψ で表わすと、二次元の非圧縮粘性流体の方程式は

$$\Psi_{xxt} + \Psi_{yyt} - \Psi_x (\Psi_{xxy} + \Psi_{yyy}) + \Psi_y (\Psi_{xxx} + \Psi_{xyy})$$

$$= \nu (\Psi_{xxxx} + 2\Psi_{xxyy} + \Psi_{yyyy}) \quad (1)$$

である。自由表面の水位を

$$h(x, t) = \eta \quad (2)$$

を表わし、その変動部分の流函数を ψ によって表わす。無次元量と x, y, t との関係は

$$x = l_0 x^*, \quad y = l_0 y^*, \quad t = l_0 u_0^{-1} t^*, \quad \bar{\psi} = u_0 h_0 \bar{\psi}^*$$

$$\psi = u_0 h_0 \psi^*, \quad \rho = \rho_0 h_0 \rho^*, \quad h = h_0 h^*, \quad (3)$$

$$u_0 = \frac{g h_0^2}{2\nu} \quad (4)$$

である。このとき、量 x, y, t の運動方程式と境界条件は

$$\begin{aligned} \psi_{yyyy} = \mu R [\psi_{yy} t + (\bar{\psi}_y + \psi_y) \psi_{xyy} - (\bar{\psi}_{yyy} + \psi_{yyy}) \psi_x] \\ - 2\mu^2 \psi_{xxyy} + \mu^3 R [\psi_{xxt} + (\bar{\psi}_y + \psi_y) \psi_{xxx} - \psi_x \psi_{xxy}] \\ - \mu^4 \psi_{xxxx}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\psi_x = 0, \quad \eta = 0, \quad (6)$$

$$\psi_y = 0, \quad \eta = 0, \quad (7)$$

$$(\bar{\psi}_{yy} + \psi_{yy} - \mu^2 \psi_{xx})(1 - \mu^2 h_x^2) - 4\mu^2 \psi_{xy} h_x = 0, \quad y=h, \quad (8)$$

$$-\frac{W \mu^2 h_{xx}}{(1 + \mu^2 h_x^2)^{3/2}} - \rho - \mu \psi_{xy} \frac{(1 - \mu^2 h_x^2)}{1 + \mu^2 h_x^2} - \frac{4\mu^3 \psi_{xy} h_x^2}{1 - \mu^4 h_x^4} = 0, \quad y=h, \quad (9)$$

$$h_t = -[\bar{\psi}(h) + \psi(h)]_x \quad (10)$$

$$z = 12$$

$$\bar{\psi} = y^2 - \frac{1}{3} y^3, \quad (11)$$

$$p_x = \frac{1}{2\mu} \psi_{yy} - \frac{1}{2} [\psi_{yt} + (\bar{\psi}_t + \psi_t) \psi_{xy} - (\bar{\psi}_{xy} + \psi_{xy}) \psi_x] + \frac{1}{2} \mu \psi_{xy}. \quad (12)$$

Let μ be a real number, h is a function of x and y , W is a function of x and y .

$$R = \frac{gh_0^3}{2\nu^2}, \quad \mu = \frac{h_0}{l_0}, \quad W = \frac{W}{\rho gh_0^2} \quad (13)$$

is a function of x and y .

The solution of the equation is sought in the form

$$\psi = \psi^{(0)} + \mu \psi^{(1)} + \mu^2 \psi^{(2)} + \dots \quad (15)$$

$$p = p^{(0)} + \mu p^{(1)} + \mu^2 p^{(2)} + \dots \quad (16)$$

and the solution is sought in the form

$$\psi^{(0)} = (h-1)y^2, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} = & \left(\frac{2}{3} R h^4 h_x + \mu^2 W h h_{xxx} \right) y^2 - \frac{1}{3} \mu^2 W h_{xxx} y^3 \\ & - \frac{1}{6} R h^2 h_x y^4 + \frac{1}{30} R h h_x y^5 \end{aligned} \quad (18)$$

が求まる。表面の条件を代入して微分すると

$$h_t = -2h^2 h_x - \mu \left(\frac{8}{15} R h^6 h_{xx} + \frac{16}{5} R h^5 h_x^2 + \frac{2}{3} \mu^2 W h^3 h_{xxxx} + 2\mu^2 W h^2 h_x h_{xxx} \right) \quad (5)$$

が得られる。これが表面の変動を記述する方程式である。

3. 孤立解

方程式(18)の解を

$$h = h(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (19)$$

と仮定する。式(19)を(18)に代入すると

$$-c \frac{dh}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left[\frac{2}{3} h^3 + \mu \left(\frac{8}{15} R h^6 \frac{dh}{d\xi} + \frac{2}{3} \mu^2 W h^3 \frac{d^3 h}{d\xi^3} \right) \right] = 0, \quad (20)$$

一度積分すると

$$-ch + \frac{2}{3} h^3 + \mu \left(\frac{8}{15} R h^6 \frac{dh}{d\xi} + \frac{2}{3} \mu^2 W h^3 \frac{d^3 h}{d\xi^3} \right) = A. \quad (21)$$

ここで、式(21)の解に対する境界条件

$$h \rightarrow k, \quad \xi = \pm \infty \quad (22)$$

が与えられる。式(22)に代入すると

$$A = -ck + \frac{2}{3} k^3. \quad (23)$$

新しい変数

$$\eta = \varepsilon^{-1} \xi, \quad \varepsilon = \mu W^{1/3} \quad (24)$$

を $\frac{1}{3}\lambda$ に, (22) に代 λ すると

$$-ch + \frac{2}{3}h^3 + \frac{8}{15} \frac{R}{W^{1/3}} h^6 \frac{dh}{d\eta} + \frac{2}{3} h^3 \frac{d^3 h}{d\eta^3} = -ck + \frac{2}{3}k^3 \quad (25)$$

で, 境界条件は

$$h \rightarrow k, \quad \eta \rightarrow \pm\infty \quad (26)$$

となる. ところで R, W は $R/W^{1/3}$ と 2 と 4 と 3 の比計算するに注意

$$W = 1000. \quad (27)$$

と $1/2$ と $1/4$. かつ $\eta \rightarrow \pm\infty$ かつ $h \rightarrow k$ とする

$$h = h' + k \quad (28)$$

を代 λ すると

$$\frac{d^3 h'}{d\eta^3} + 3r \frac{dh'}{d\eta} + sh' = 0, \quad (29)$$

$$r = \frac{4}{15} \frac{Rk^3}{W^{1/3}}, \quad s = \frac{3}{k} - \frac{3c}{2k^3}. \quad (30)$$

線形方程式 (29) は

$$h' = \exp(\sigma\eta) \quad (31)$$

の解を求め、代入すると

$$\sigma^3 + 3r\sigma + \delta = 0. \quad (32)$$

を得るから、式(32)の解は

$$\sigma = \alpha \quad (33)$$

$$\text{と} \quad \sigma = -\frac{1}{2}\alpha \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\beta \quad (34)$$

$$\text{と} \quad \alpha = \sqrt[3]{J_+} + \sqrt[3]{J_-}, \quad \beta = \sqrt[3]{J_+} - \sqrt[3]{J_-} \quad (35)$$

$$J_{\pm} = \frac{1}{2}(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4r^3}). \quad (36)$$

である。まず式 $\alpha > 0$ として、上流では

$$h_u = C_1 \exp(\alpha \eta) \quad (37)$$

下流では

$$h_d = C_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\eta\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\beta\eta + \gamma\right) \quad (38)$$

となる。まず h_u を出発して、非線形性のため $\eta = 3$ を数値積分により2解を求めると

$$h_i = h_i(\eta) \quad (39)$$

これと h_u に接続すると

$$h_i''(\eta_2) - \lambda h_i'(\eta_2) + \left(\frac{\lambda^2}{4} + \beta^2\right) h_i(\eta_2) = 0 \quad (40)$$

が得られる。これを η_2 について変換して、半径式

$$F(c, k, R, w) = 0 \quad (41)$$

が得られる。各々を求められた波形を η_2 と、波の幅 $\delta\eta$ は

$$\delta\eta \sim 1 \quad (42)$$

にある。 $\Delta\eta \sim \mu W^{1/3}$ をその結果として得られ、次の重要な結果が得られる。

$$\frac{l_0 \Delta\eta}{h_0} \sim W^{1/3} \quad (43)$$

つまり、孤立波の幅 $\delta\eta$ は流体膜の厚さ h_0 ではなくて $W^{1/3}$ であるということである。

4. S-解

観測された波と、上に求められた孤立解とを比べると、孤立解から周期解をつくることができる。孤立波の周期的経路 Λ かく Λ とし

$$\Lambda = 2\pi l_0 \quad (44)$$

と取ると

$$h(\xi) = h(\xi + 2\pi) \quad (45)$$

が成り立つ。(2) の二解の重なりを λ とし

$$h = \rho^{(n)}, \quad \rho^{(n)} = k + \sum [h^{(n)}(\xi + 2m\pi) - k] \quad (46)$$

を定義する。この λ の波長 λ と

$$\lambda = \frac{1}{h_0} \quad (47)$$

により表わせば

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \mu. \quad (48)$$

この式は波の波数と波長 λ の関係を表わしている。

(2) より、解 $\rho^{(n)}$ に対して

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^{(n)} d\xi = 1. \quad (49)$$

を導くと

$$k + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [h^{(n)} - k] d\xi = 1 \quad (50)$$

よって

$$\mu = \frac{2\pi(1-k)}{W^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} [h^{(n)}(\eta) - k] d\eta} \quad (51)$$

式(51)に於て, R と μ とは重要な式である。

5. F-解

各々の種之解は, $\Delta \xi \sim \mu W^{1/3}$ or 2π である。今これを $\mu W^{1/3} \ll 2\pi$ と仮定する。

$$\mu W^{1/3} \ll 2\pi \quad (52)$$

であれば, 相互作用を無視してよい。このとき

$$\mu W^{1/3} \sim 2\pi \quad (53)$$

に於ては, 種之解の存在は重なり合う (46) は正しくなる。

このとき解は

$$h = f^{(n)}, \quad f^{(n)} = 1 + \sum a_m^{(n)} e^{im\xi} + \sum a_m^{(n)*} e^{-im\xi} \quad (54)$$

とし表わすのに適当である。運動方程式(20)に代入して

$$\begin{aligned} & im \left[2 - c + im\mu \left(\frac{8}{15} R - \frac{2}{3} m^2 \mu^2 W \right) \right] a_m^{(n)} \\ &= N_m(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}) \end{aligned} \quad (55)$$

を得る。式(55)に表わした未知数は $\mu, c, a_1^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$ である。これら $2N+1$ 個の未知数 R は独立である。また, $2N+1$ 個の未知数 $a_m^{(n)}$ がある。したがって, (55)の式は $2N$ 個の独立な方程式と見做すことができる。すなわち, a_1 (未知数としてとれる) を定めると他の未知数が決まる。

6. 実験との比較

こゝでは特長の長さとして平均厚さ h_0 とし、その結果を求めた。この流体膜の厚さは非常に薄いので、厚さを正しく測定するのは容易でない。そこでこの場合にも測定されるのは流量 Q であり、新しい厚さの単位として h_0^* とし

$$Q = \frac{\rho g h_0^{*3}}{3\nu} \quad (56)$$

を定義する。この h_0^* について、三つのパラメータを

$$R^* = \frac{\rho g h_0^{*3}}{2\nu^2}, \quad \mu^* = \frac{h_0^*}{l_0}, \quad W^* = \frac{S}{\rho g h_0^{*2}} \quad (57)$$

を定義する。この時以前定義された R と

$$R^* = R g \quad (58)$$

で与えられる。この式から h_0^* 、 h_0 の比は次のようになる。

$$\frac{h_0^*}{h_0} = f, \quad f = \left(\frac{3}{2} g\right)^{1/3}. \quad (59)$$

さらに

$$W^{**} = 1000 \quad (60)$$

と表示するのを望むしから、さらに R^{**} 、 μ^{**} 、 W^{**} を定義

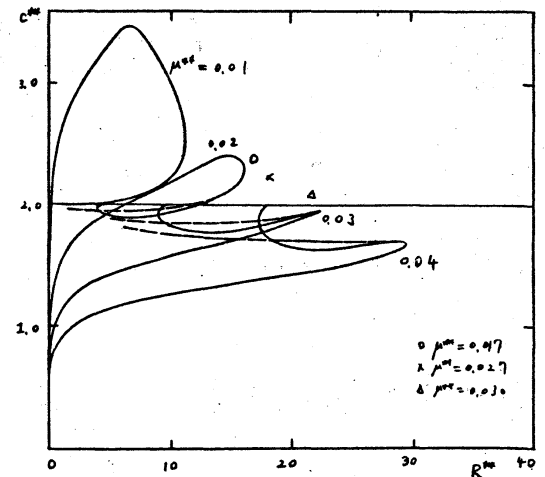
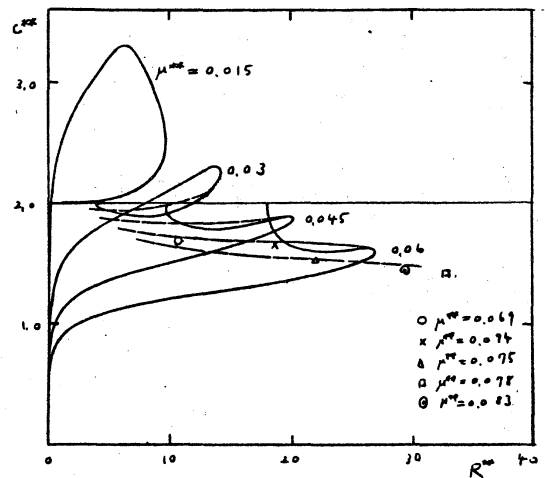
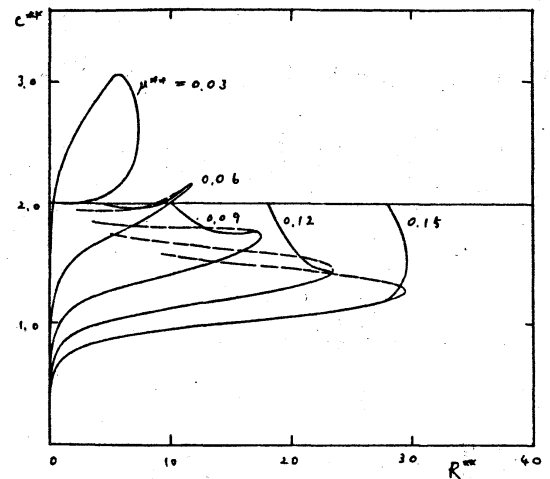
下と。

$$R^{**} = R f^{1/9}, \quad \mu^{**} = \mu f^{1/9}, \quad c^{**} = c \bar{f}^{2/3} \quad (61)$$

で与えられる。

右の図に上から同期解
の第一種、第二種と第三
種について、波の伝播の
レイト数、波数と
で表わされている。実験
値とそれらのグラフとを
比較すると第一種、同
期解に対応するものは
その理由は測定された流
量はかなり大きいので第
一種に対応するカーブが
ないというところがある。

次に第二種の同期解と
比較すると、測定され
たデータは厳密解に対応
したカーブに一致せず、
カーブの漸近解の点と波



立解、重ね合せで成る解の波の速度と一致する。これは一応
 正弦波として観測されたものには概ね解の重ね合せでとら
 えられようといふことである。最後にも三種の周期解といふや
 うな波の波の速度と一致する。これは一応
 一つの山として観測されたもの波といふ波の山は三
 つの山の重ね合せに等しいと推測と一致すると考えるべき
 ことである。

7: 結核

い、この粘性膜の鉛直壁を流れる下ろしとき、流れの解の表面振
 の形成に重要な役割を演じている。特に、流れの解の最も解と
 して存在し、その波の幅が厚さの比で $W/2$ の程度であ
 る。流れの波の性質を知らなくてはならない現象の一つ
 は波の速度の大きさである。これは流れの波の中のうずであ
 る。流れの波と実験とを比較する。周期解から流れの解
 を使ったつくられ、各々、流れの波解が独立に運動するこ
 とを示す。この解は正しい流れの解が重なり合うようにあると
 示す。これは二つの方法を組み合わせると周期解が存在する波の
 存在を示す。これは、実験と理論の結果を比較することによって
 正弦波と一致を示すことが流れの解の重ね合わせによる

